UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ, FES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
ET INFORMATIQUE

COURS D'Algebre

SVI et STU

S1

Pr : JARRAR OULIDI Abderrahmane

Année Universitaire 2005-2006

Programme

CHAPITRE1
Définitions et opérations sur les matrices

** Applications linéaires
** Matrice d'un endomorphisme
** Noyau et image d'un endomorphisme
** Isomorphismes

CHAPITRE2
Systèmes d'équations linéaires

** Systèmes d'équations linéaires
** Discussion ''rang d'un système d'équations linéaires''

CHAPITRE3
Déterminants

** Déterminants des matrices carrées d'ordre 2 et 3

** Déterminants des matrices carrées d'ordre n
** Système de Cramer

Matrices et applications linéaires

A-Matrices

I- Définitions et opérations sur les matrices

Définitions 1

Une matrice réelle de type (n, p) est un tableau de nombres réels

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & a_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

i ème ligne

j ème colonne

Lorsque n = p on parlera de matrice carrée d'ordre n.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

A est une matrice carrée d'ordre 3 ou matrice de type (3 , 3)

Définition 2 ‘’ Diagonale d’une matrice’’

On appelle diagonale d’une matrice carrée d’ordre n, l’ensemble de ses coefficients dont l’indice de ligne est égal à l’indice de colonne et on note

$$\Delta\,(a_{ij}) = \{\, a_{ii} \,\}_{1 \le i \le n} = \{\, a_{11} , a_{22} , \ldots, a_{nn} \,\}$$

Définitions 3 ‘’Matrice diagonale’’

On appelle matrice diagonale, toute matrice carrée dont les coefficients sont tous nuls, sauf ceux de la diagonale

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Delta\,(A) = \{\, 3, 5, 7 \,\}$
A est une matrice diagonale

$\Delta\,(B) = \{\, 1, 1, 3 \,\}$
B n’est pas une matrice diagonale

Définition 4

a) une matrice carrée $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est dite triangulaire supérieure

si $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$

b) une matrice carrée $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est dite triangulaire inférieure

si $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A est une matrice
Triangulaire supérieure

B est une matrice
Triangulaire inférieure

II- Opérations sur les matrices

1 - Somme de deux matrices

Soient A et B deux matrices de même type (m, n)

Définition

On appelle somme de A et B la matrice notée A + B, de type (m, n) et de terme d'indice (i,j) égal à $a_{ij} + b_{ij}$

Remarque

Si A et B ne sont pas de même type alors la somme de A et B n'est pas définie.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriétés 1

On note l'ensemble des matrices de type (m, n) à coefficients dans K (= R ou C) par $M_{(m,n)}(K)$

a) $\forall A \in M_{(m,n)}(K)$, $\forall B \in M_{(m,n)}(K)$: $A + B = B + A$

b) $\forall A, B, C \in M_{(m,n)}(K)$: $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $\forall A \in M_{(m,n)}(K)$ $A + 0_{(m,n)} = A$
où $0_{(m,n)}$ est la matrice nulle

2 - Produit d'une matrice par un scalaire

Définition

Soient $A \in M_{(m,n)}(K)$ et un scalaire $\lambda \in K$. On note $\lambda.A$, la matrice de type (m, n) et de terme d'indice (i,j) égal à $\lambda.\ a_{ij}$. La matrice $\lambda.A$ est appelée la matrice produit de λ par A

Exemple : $\lambda = -3$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \lambda.A = -3.A = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -3 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

3 - Produit de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de type (m, n) et $B = (b_{ij})$ une matrice de type (p,q), toutes les deux à coefficients dans K.

Définition 1

Si p = n, alors on note A*B tout simplement par A.B, la matrice de type (m, q) et de terme d'indice (k, l) égal à

$$a_{k1}\, b_{1l} + a_{k2}\, b_{2l} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{kn}\, b_{nl} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{il}$$

La matrice A.B est appelée la matrice produit de A par B.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A.B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A est de type (3,2) B est de type (2,2) A.B est de type (3, 2)

Principe : cas où (n = m = 2)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Ces opérations se généralisent pour toutes les matrices dont le produit est défini.

Cas où (n = m = 3)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j3} \end{pmatrix}$$

Remarques

Soient A et B deux matrices à coefficients dans K.

1) Pour que A.B existe, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

2) Le nombre de lignes de A.B est égal au nombre de lignes de A, si A.B est défini.

3) Le nombre de colonnes de A.B est égal au nombre de colonnes de B, si A.B est défini

Propriétés 2 :

1) $\forall$ A, B, C $\in M_{(n, n)}(K)$: (A.B).C = A.(B.C)
(A+B).C = A.C + B.C
A.(B + C) = A.B + A.C

2) I_n. A = A. I_n = A $\forall$ A $\in M_{(n, n)}(K)$

I_n.: matrice identité de type (n, n)

3) $\forall$ A, B $\in M_{(n, n)}(K)$, $\forall$ a $\in$ K a.(A.B) = (a.A).B

4) le produit A.B $\neq$ B.A (en général)

<u>Définition 2</u> : (matrice transposée)

On appelle transposée d'une matrice M =(a_{ij}) de type (p, q), la matrice ${}^tM = (a_{ji})$ qui est de type (q, p)

Ce qui est ligne dans M devient colonne dans ${}^tM$.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 4 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^tM = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés 3 :

1) si M est une matrice diagonale, alors M = ${}^tM$
2) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
3) ${}^t(A.B) = {}^tB.\,{}^tA$
4) ${}^t({}^tM) = M$

4 – Opérations élémentaires lignes

Définitions 1

On appelle opérations élémentaires lignes de $M_{(m,\ n)}(\ K\ )$ l'une des trois applications : L_{ij} , $L_{ij}(\alpha)$ et $L_k(\beta)$ définies de $M_{(m,\ n)}(\ K)$ dans $M_{(m\ ,n)}(K)$, (α , β non nuls dans K) dont l'image d'une matrice $A \in M_{(m,\ n)}(K)$ est donnée par :

1) L_{ij} (A) = la matrice obtenue de A en permutant sa i ème ligne avec sa j ème ligne.

2) L_{ij} (α)(A) = la matrice obtenue de A en ajoutant à sa i ème ligne sa j ème ligne qu'on a multiplié par α.

3) L_i (β)(A) = la matrice obtenue de A en multipliant sa i ème ligne par β.

Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$L_3 \rightarrow L_3 - L_2 = L_{32}(-1)$

$L_2 \rightarrow L_2 - L_1 = L_{21}(-1)$

$$L_{32}(-1)(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = A_1 \qquad L_{32}(-1)(A) = A_1$$

$$L_{21}(-1)(\ A_1\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = A_2 \qquad L_{21}(-1)(\ A_1\ ) = A_2$$

Exemple 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \ ; \qquad L_{12}(\ A\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A_1$$

$$L_{21}(-2)(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Notation

1) pour dire que B est l'image de A par une opération élémentaire L on note $A \overset{L}{\sim} B$
2) Pour que B est l'image de A par un nombre fini d'opérations élémentaires sans préciser ces opération, on note A ~ B

Exemples

1) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{L_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = L_{12}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{L_2(\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est notée simplement

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Définition 2

Deux matrices sont dites équivalentes si l'une est la transformée de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires. On note A ~ B.

5- Matrices échelonnées lignes

Définition 1

A est une matrice échelonnée lignes (e. l) si elle vérifie les deux conditions suivantes :
1) Après une ligne nulle de A il n'y a que des lignes nulles
2) Le nombre de zéros consécutifs commençant une ligne non nulle de A, augmente strictement de ligne en ligne.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

M est échelonnée lignes N n'est pas échelonnée lignes

Définition 2

Si A est échelonnée lignes et si L est une ligne non nulle de A, le premier coefficient non nul de L est appelé le pivot de la ligne L.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le pivot de la 2ème ligne de M est -2
Le pivot de la 3ème ligne de M est 4
La 4ème ligne n'a pas de pivot

Définition 3

A est une matrice échelonnée lignes réduite (e. l. r) si :
1) A est (e. l) échelonnée lignes
2) Tous les pivots des lignes de la matrice A sont égaux à 1

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est e. l. r B n'est pas e. l. r

Définition 4

Une matrice A de $M_{(m,\ n)}(K)$ est dite échelonnée lignes réduite canonique (e. l. r. c) si :

1) A est e. l. r
2) Dans chaque colonne où il y a le pivot, le pivot est le seul coefficient non nul.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e. l. r. c e. l. r. c

Méthode

1) On place les lignes non nulles en début de la matrice
2) On fait apparaître le pivot de la 1ère ligne (pivot =1)
3) On annule tous les coefficients sous ce pivot
4) On passe à la 2ème ligne, on fait apparaître le pivot (=1) de cette ligne
5) On annule les coefficients sous ce pivot et ainsi de suite

Définition '' Rang d'une matrice''

On appelle le rang d'une matrice A, le nombre de pivot qu'il y a dans la matrice (e. l) équivalente à A. On note rg (A) = nombre de pivots (A)

Proposition

Pour toute matrice A de $M_{(m,\, n)}(K)$

$$\boxed{\text{rg}(A) \leq \inf(m, n)}$$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{rg}(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & m-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -m-1 \end{pmatrix} \qquad \text{rg}(B) = 3 \ ; \ \forall\, m \in \mathbb{R}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 1 & -1 & m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix} \qquad \text{rg}(C) = 3 \quad \text{si } m \neq -1$$

$$\text{rg}(C) = 2 \quad \text{si } m = -1$$

6- Inverse d'une matrice carrée

Définition

On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est régulière ou inversible si et seulement si il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$A.\,B = B.\,A = I_n$$

La matrice B est alors appelée matrice inverse de A notée A^{-1}. On note

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

<u>Caractérisation d'une matrice carrée inversible</u>

1) Une matrice comportant une ligne ou une colonne nulle n'est jamais inversible

2) Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si : les termes de sa diagonale sont tous non nuls

3) Une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si : son rang est égal à n

4) L'inverse d'une matrice est unique, en effet

$M. M' = M'. M = I_n \quad \Rightarrow \quad M''. (M. M') = M''. I_n = M''$
$M. M'' = M''.M = I_n \qquad \text{et } (M''M). M' = M'. I_n = M'$

5) $(M. N)^{-1} = N^{-1}. M^{-1}$

6-1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Pour calculer l'inverse d'une matrice carrée A d'ordre n, dont on sait qu'elle est inversible, on procède de la façon suivante :

1) On considère la matrice E de type (n, 2n) dont les n premières colonnes sont celles de A et les n dernières colonnes sont celles de I_n

2) On applique à E des opérations élémentaires de sorte que les n premières colonnes de E se transforment en I_n , par contre les n dernières colonnes de la matrice transformée forment la matrice inverse de A.

Exemples

1) $M= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = ?$

$$E = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_{12}(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{on a : } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad M^{-1} = ?$

$$E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2(\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_{32}(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \overset{L_3(-\frac{1}{3})}{\sim} \dots \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2 et vérifier la relation $A^2 - 3A + 2I = 0$
b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{(3,3)}$$

b) $A^2 - 3A + 2I = 0$

$$\Rightarrow A^2 - 3A = -2I \Rightarrow \frac{3}{2} A - \frac{1}{2} A^2 = I$$

$\Rightarrow (\frac{3}{2}\ I - \ \frac{1}{2}\ A)\ A = A.\ (\frac{3}{2}\ I - \ \frac{1}{2}\ A) = I$

Conclusion A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = (\frac{3}{2}\ I - \frac{1}{2} A) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

B – Application linéaires

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur R. une application $f : E \longrightarrow F$, $x \longmapsto f(x)$

est une application linéaire Si :

1) $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in E$
2) $f(\alpha.x) = \alpha f(x) \quad \forall\, \alpha \in R$

Exemple

$$f : R^2 \longrightarrow R^3$$
$$(x, y) \longmapsto f(x,y) = (x+y, x-y, y)$$

f est une application linéaire

en effet :

$X = (x, y)$, $Y = (u, v)$

1) $f(X + Y) = f((x, y) + (u, v)) = f((x + u , y + v))$
$= (x + u + y + v, x – y + u – v, y + v)$
$= (x + y, x – y, y) + (u + v, u – v, v)$
$= f(x, y) + f(u,v)$

2) $f(\alpha X) = f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y)$
$= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y, \alpha y)$
$= \alpha(x + y, x –y, y)$
$= \alpha f(x, y) = \alpha f(X)$

f est également une application linéaire ssi :
$\forall\, x, y \in E \;,\; \forall\, \alpha, \beta \in R$
$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Remarque

En remplaçant α par 0 dans 2) on obtient $f(0) = 0$
Donc si $f(0) \neq 0$, f n'est pas une application linéaire.

Exemple

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x+1,\ x+2y)$$

$f(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$, donc f n'est pas une application linéaire.

Définitions

1) Les applications linéaires de E dans R sont appelées les formes linéaires de E dans R
2) Les applications linéaires de E dans E sont appelées les endomorphismes de E
3) Les applications linéaires bijectives de E sur F sont appelées les isomorphismes de E sur F
4) Les isomorphismes de E dans E sont appelés les automorphismes de E

III - Matrice d'un endomorphisme dans une base donnée

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E, dim E = n

Dans E on choisit une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n) = (e_i)_{1 \le i \le n}$
Soit $x \in E$, on pose $f(x) = y \in E$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad ; \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \quad \text{et} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

$$y = f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j e_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j\right) e_i = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

$$\Longrightarrow \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$y = A\,x \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

A est appelée matrice de l'endomorphisme f de E

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} = M_B(f)$: matrice associée à f dans la base B de E

Exemples

1) Soit $f : R^2 \longrightarrow R^2$ un endomorphisme vérifiant

f(1,0) = (7,2) et f(0,1) = (-3,4)

Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique B = {(1,0), (0,1)} de R^2.

Soit $(x, y) \in R^2$

f (x,y) = f (x(1,0) , y(0,1)) = x f(1,0) + y f(0,1) car f est une application linéaire
= x (7,2) + y (-3,4) = (7x -3y, 2x +4y)

f(x,y) se traduit par les égalités (en colonnes)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 3y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ; A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) soit $f : R^3 \longrightarrow R^3$ un endomorphisme défini par

f (x, y,z) = (3x -2y, 2x -4z , y-3z)

Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de R^3

B = { (1,0,0) , (0, 1,0) , (0 , 0, 1) } = { e_1, e_2, e_3}

On a :

$f(e_1) = (3 , 2, 0) =$
$f(e_2) = (-2 , 0, 1)=$
$f(e_3) = (0 , -4, -3)$

$$A = \begin{array}{c} \\ \end{array} \overset{\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}}{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}} = M_B(f)$$

IV – Noyau et image d'un endomorphisme

Définitions

Soit E un espace vectoriel et $f \in L(E)$ '' ensemble des endomorphismes de E''.
On appelle noyau de f, noté Kerf, l'ensemble de tous les vecteurs x de E tel que : f(x) = 0

$$\mathrm{Kerf} = \{ x \in E \ / \ f(x) = 0\}$$

On appelle image de f, notée Imf, l'ensemble f(E) c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs y qui peuvent s'écrire sous la forme y = f(x) où $x \in E$

$$\mathrm{Imf} = f(E) = \{ f(x) \ ; x \quad E\}$$

On appelle rang de l'endomorphisme f, notée rgf, la dimension du sous espace vectoriel Imf.

Théorème du rang (admis)

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $f \in L(E)$ on a :

$$\dim \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{rg}\, f = n$$

Méthode de détermination de Kerf et Imf sur un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1) Déterminer une base et la dimension de Kerf
2) Déterminer une base et la dimension de Imf

1)

Etape 1 : Déterminer Kerf

$$f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = z \text{ donc Kerf} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x = z \}$$

$$= \{ (x, y, x) \in \mathbb{R}^3 / \ x, y \in \mathbb{R} \}$$

Etape 2 : Trouver un système générateur de Kerf

Kerf $= \{ (x, y, x) \in \mathbb{R}^3 / \ x , y \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) \ / \ x , y \in \mathbb{R} \}$

Donc $\{ (1, 0, 1) , (0, 1, 0) \}$ est un système générateur de Kerf.

Etape 3 : Prouver que le système générateur trouvé est libre

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$\alpha (1, 0, 1) + \beta (0, 1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha , \beta , \alpha) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$

Ce qui montre que $\{ (1, 0, 1) , (0, 1, 0) \}$ est libre. Le système trouvé est un système générateur et libre de Kerf, donc dim Kerf = 2.

2)

Etape 1 : déduire rgf de ce qui précéde (th du rg)

$$\left.\begin{array}{l} \dim Kerf + Imf = \dim R^3 \\ \dim Kerf = 2 \\ \dim R^3 = 3 \end{array}\right\} \quad \dim Imf = 1 = rgf$$

Etape 2 : Déterminer Imf

$(u, v, w) \in Imf \iff \exists (x , y, z) \in R^3 \; / \; (u, v, w) = f(x , y, z)$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} u = - x + z \\ v = 0 \\ w = x - z \end{cases}$$

Donc $Imf = \{(-x +z, 0, x - z) \; ; x \;, z \in R\}$

Etape 3 : Trouver un système générateur de Imf

$Imf = \{ x(-1 , 0, 1) + z(1, 0, -1) \; ; x \;, z \in R\}$

Donc { (-1 , 0, 1) ,(1, 0, -1) } est un système générateur de Imf

Etape 4 : Trouver une base de Imf

On constate que 1(-1 , 0, 1) + 1(1, 0, -1) = (0, 0 , 0), donc la famille génératrice { (-1 , 0, 1) ,(1, 0, -1) } est liée. On retient donc l'élément (-1 , 0, 1) par exemple.
On vérifie que { (-1 , 0, 1) } est libre (famille à un seul vecteur non nul)

Conclusion { (-1 , 0, 1) } est une base de Imf.

V – Isomorphismes

Définitions

Soit E un espace vectoriel et f ∈ L(E). Lorsque f est bijective on dit que f est un isomorphisme de E ou encore un automorphisme de E.

a) Propriété

Si f est un endomorphisme (bijectif de E, l'application réciproque f^{-1} de f est aussi un endomorphisme de E, autrement dit si f est une application linéaire, f^{-1} l'est aussi)

Corollaire :

Si f est un isomorphisme de E, son application réciproque f^{-1} est aussi un isomorphisme de E.

b) Propriété matricielle – Matrice associée à l'endomorphisme f^{-1}

Théorème

Soit f ∈ L(E).et $M_B(f)$ la matrice associée à f dans une base B de E.
On a f est un isomorphisme de E si et seulement si il existe une base B de E telle que $M_B(f)$ soit inversible.
Dans ce cas, on a alors

$$M_B(f^{-1}) = [\ M_B(f)\ ]^{-1}$$

Caractérisation d'un endomorphisme par noyau et image

a) **Théorème** :
soit f ∈ L(E)., f est un isomorphisme de E ⟺ Kerf = {0} ⟺ Imf = E

b) Application :

$$f : R_2[X] \longrightarrow R_2[X]$$
$$P \longmapsto P + P'$$

Montrons que f est un isomorphisme de $R_2[X]$.

Posons $P(X) = a X^2 + b X + c$

On a :

$f(P) = 0 \Longleftrightarrow P(X) + P'(X) = 0 \quad ; \quad \forall X \in R$

$\Longleftrightarrow (a X^2 + b X + c) + (2a X + b) = 0 \quad ; \quad \forall X \in R$

or $(\forall X \in R)$, $(a X^2 + b X + c) + (2a X + b) = 0$

$\Longleftrightarrow (\forall X \in R),\ a X^2 + (2a + b) X + b + c = 0$

$\Longleftrightarrow a = 0,\ b = 0,\ c = 0 \Longleftrightarrow P = 0$

Donc Kerf = {0} et par conséquent f est un isomorphisme de $R_2[X]$.

Ξ

Système d'équations linéaires

I - systèmes d'équations linéaires

1- équation linéaire

Une équation linéaire est une équation de la forme :

$$(1) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_p x_p = b$$

Où $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_p$, b sont des réels donnés et $x_1, x_2 \ldots. x_p$ des réels à déterminer. Les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont appelées les coefficients de cette équation, b la constante et $x_1, x_2 \ldots., x_p$ les inconnues. On dit que :

$$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots., x_p = s_p$$

est une solution de l'équation (1) lorsque $s_1, s_2, \ldots, s_p$ sont des réels tels que :

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_p s_p = b$$

On notera l'ensemble des solutions S par

$$S = \{ (s_1, s_2, \ldots, s_p) \in R^p / \ a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots\ldots + a_p s_p = b \}$$

Exemples

** $-4x + 3y = 7$ est une équation linéaire à 2 inconnues
$a_1 = -4$, $a_2 = 3$, $b = 7$
Les solutions de cette équation sont :
$y = r$, $x = 3/4\, r - 7/4$ où r est un réel arbitraire

** les solutions de l'équations linaire $5x - 3y + 2z = 1$
$y = r$, $z = s$, $x = 3/5\, r - 2/5\, s + 1/5$ où r et s sont des réels arbitraires.

** $xy + x - 2y$ n'est pas une équation linéaire.

** $\sqrt{x} + 2y = 3$ n'est pas une équation linéaire.

2- Système d'équations linéaires :

Un système de p équations linéaires à n inconnues et à coefficients dans R est la donnée d'un nombre fini d'équations linéaires à n inconnues et à coefficients dans R, qu'on cherche à résoudre simultanément :

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \quad\ldots. \\ \quad\ldots. \\ a_{p1}\, x_1 + a_{p2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{pn}\, x_n = b_p \end{cases}$$

Une solution dans R^n d'un système (2) de p équations à n inconnues est un n-uplet $(l_1, l_2, \ldots, l_n) \in R^n$, solution de chacune des p équations de (2).

Exemples

1)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2\, x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3\, x_2 - x_3 = 15 \end{cases} \qquad S = \{(3, 3, 3)\}$$

2)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 7\, x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3\, x_3 = 2 \end{cases}$$

le triplet (8, -9 , 1) est une solution du système, Mais (-3, 2, 1) n'est pas une solution malgré que c'est une solution de la 2ème et de la 3ème équation.

Vocabulaire

Pour un système de p équations à n inconnues et à coefficients dans R.

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \quad\ldots. \\ \quad\ldots. \\ a_{p1}\, x_1 + a_{p2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{pn}\, x_n = b_p \end{cases}$$

1)

$$A = A_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice du système (S)

2)

$$E = E_S = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

est appelée la matrice élargie du système (S)

3)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

est appelé la matrice des inconnues du système (S)

4)

$$B = B_S = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

est appelé la matrice du second membre du système (S).

On note $A.\,X = B$ $\quad E = (A \mid B)$

3) <u>Résolution d'un système</u>

i) Pour résoudre un système d'équations linaires, on est amené à transformer le système en d'autres systèmes qui possèdent le même ensemble de solution.

Ces transformations sont faites grâce à des opérations élémentaires qui sont de types

a) L_{ij} : permuter la i ème équation avec la j ème équation
b) $L_i(\alpha)$: multiplier la i ème équation par α, $\alpha \in R^*$
c) $L_{ij}(\alpha)$: à la i ème équation on ajoute la j ème équation multiplier par α.

Exemple

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \overset{L_1(1/2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\overset{L_{21}(-1)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_2 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \overset{L_2(-1/2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\overset{L_{23}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

<u>Remarque</u>

Les opérations élémentaires effectuées sur le système d'équations apparaissent aussi au niveau des matrices élargies

$$E(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \overset{L_1(\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_{21}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \overset{L_2(-\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_{23}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ii) Méthode de Gauss Jordan

La méthode de Gauss Jordan (ou d'élimination triangulaire), associé à tout système de p équation linéaires, est une organisation de calcul pour résoudre ce système.

1ère étape

On fait apparaître (à l'aide des opérations L_i (α) et L_{ij} (α)) dans la 1ère équation l'inconnue x_1 avec 1 comme coefficient

2ère étape

On élimine (à l'aide de L_{ij} (α)) l'inconnue x_1 dans les équations restantes.

3ère étape

On fait apparaître dans la 2ème équation l'inconnue suivante avec le coefficient 1.

4ère étape

Éliminer cette inconnue dans les équations plus bas et ainsi de suite.

Exemple

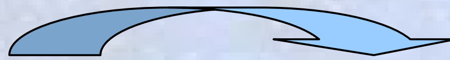
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \underset{\Longleftrightarrow}{L_{21}(-2)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -3x_2 - 7x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{L_{31}(-1)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -3x_2 - 7x_3 = -4 \\ -x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \underset{\Longleftrightarrow}{L_2(-1/3)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 7/3\, x_3 = 4/3 \\ -x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{L_{32}(-1)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 7/3\, x_3 = 4/3 \\ 1/3\, x_3 = 1/3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 7/3\, x_3 = 4/3 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Utilisation de la matrice élargie

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$



$$E = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

II – discussions

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

Notons par : $r = rg(A)$ le rang de la matrice A du système
Et $r' = rg(E)$: le rang de la matrice élargie E du système

Remarque $r \leq r'$ et $r \leq n$.

Théorème :

- si $r < r'$ le système est dit incompatible c'est-à-dire l'ensemble des solutions $\boldsymbol{S} = \varnothing$.
- si $r = r'$ le système est dit compatible et dans ce cas on a deux possibilités

i) si $r = n$ on a une solution unique
ii) si $r < n$ on a une infinité de solutions

Exemple

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y - z = -2 \\ x - 2y + m z = -1 \end{cases}$$

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & m-1 & -8 \end{array}\right)$$

Si $m \neq 1$: $r = 3$ et $r' = 3$

- $r = r' = 3$, veut dire que le système est compatible
- $r = n = 3$, on a donc une solution unique.

Si $m = 1$: $r = 2$ et $r' = 3$
r < r' donc le système est incompatible et $S = \varnothing$

Pour $m \neq 1$; cherchons cette solution unique, pour cela on rend la matrice sous la forme (e. l. r. c).

$$E \underset{m\neq 1}{\overset{L_3\left(\frac{1}{m-1}\right)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & m-1 & -8 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{8+16}{1-m}+2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{1-m}-2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{1-m} \end{array}\right)$$

$$S = \left\{\frac{2m-26}{m-1}, \frac{2m+6}{1-m}, \frac{8}{1-m}\right\}$$

Exemple 2

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = 2$; $r' = 2$; $n = 3$

* $r = r' = 2 \Rightarrow$ le système est compatible
$r = 2 < n = 3 \Rightarrow$ le système admet une infinité de solutions

On pose $a \in \mathbb{R}$ $\quad z = a$
$y - 5/3\, a = 1 \Rightarrow y = 1 + 5/3\, a$
$x + (1 + 5/3\, a) - a = 2 \Rightarrow x = 1 - 2/3\, a$

$S = \{(1 - 2/3\ a,\ 1 + 5/3\ a,\ a) \ /\ a \in R\}$
Lorsque, le système admet une infinité de solutions. On fixe (n - r) inconnues et on résout les autres inconnues en fonctions de celles qui sont fixées.
En général en fixe les inconnues correspondant aux colonnes qui ne contiennent pas de pivot.

Déterminant

I – Déterminants des matrices carrées d'ordre 2 et 3

Définition 1 : (Déterminants d'ordre 2)

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se définit par l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

- on note ce déterminant par dét (A) = $a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$

Définition 2 (Déterminants d'ordre 3)

Le déterminant d'ordre 3 correspondant à une matrice d'ordre 3 se définit par l'égalité suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- on appelle mineur d'un élément donné d'un déterminant d'ordre 3, le déterminant d'ordre 2 obtenu en supprimant dans le déterminant initial la ligne et la colonne qui contiennent l'élément donné.
- On appelle cofacteur de l'élément donné, son mineur multiplier par $(-1)^k$, où k représente la somme des numéros de la ligne et de la colonne contenant l'élément en question.
- Ainsi, le signe dont il faut affecter le mineur de l'élément correspondant du déterminant est donné par le tableau ci-dessous

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- En examinant l'égalité mentionnée ci avant, qui exprime un déterminant d'ordre 3, on voit que son deuxième membre représente la somme de produits des éléments de sa première ligne par leurs cofacteurs.

Théorème 1

Un déterminant d'ordre 3 est égal à la somme de produits des éléments de n'importe quelle de ses lignes ou colonnes par leurs cofacteurs.

Ce théorème permet de calculer la valeur du déterminant en le développant par rapport aux éléments de l'une de ses lignes ou colonnes.

Théorème 2

La somme de produits des éléments figurant dans une ligne (colonne) quelconque par les cofacteurs des éléments d'une autre ligne (colonne) est nulle.

Propriétés des détérminants d'ordre 2 et 3

1) un déterminant reste invariable si ses lignes sont remplacées par ses colonnes et ses colonnes par les lignes correspondantes.

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$, on dit dét (A) = dét (^tA)

2) le cofacteur commun des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) Quelconque peut être mis en facteur par rapport au déterminant.

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

3) si les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'un déterminant sont respectivement égaux aux éléments d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) de ce déterminant, le déterminant est nul.

4) La transposition de deux lignes (ou de deux colonnes) d'un déterminant entraîne le remplacement de ce déterminant par son opposé.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

5) Un déterminant reste invariable si l'on ajoute aux éléments de l'une de ses lignes (ou de ses colonnes) les éléments correspondants d'une autre ligne (ou d'une autre colonne) multipliés par le même nombre.

6) Si on multiplie tous les éléments d'une matrice par un scalaire λ, la matrice est multipliée par λ, tandis que le déterminant associé est multiplier par λ^n

$$\text{dét}(\lambda A) = \lambda^n \text{ dét}(A)$$

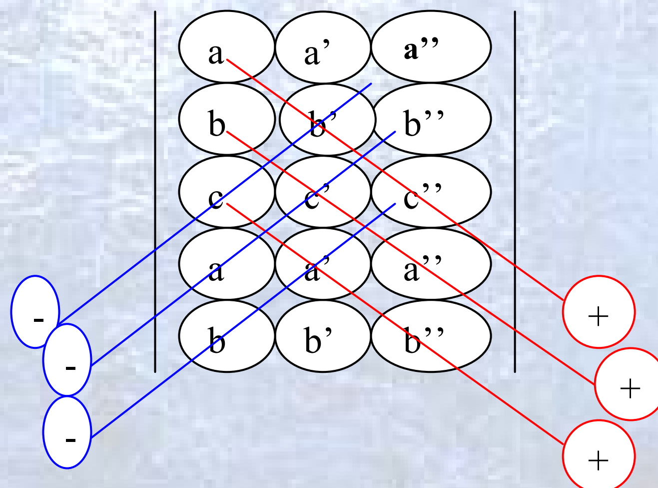
7) Le produit des déterminants de deux matrices carrées A et B de même ordre est égal au déterminant du produit A. B de ces matrices

$$\text{dét}(AB) = \text{dét}(A).\text{dét}(B)$$

<u>Règle de Sarrus</u>

Le déterminant du 3ème ordre peut se calculer par la règle de Sarrus :

On recopie, au – dessous du déterminant, les deux premières lignes ; on obtient trois termes affectés du signe + en considérant les trois parallèles à la diagonale principale ; on obtient trois termes affectés du signe – en considérant les trois parallèles à l'autre diagonale



II- Déterminants des matrices carrées d'ordre n

Déterminant d'ordre 4

Le déterminant d'ordre 4 correspondant à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Est déterminé par l'égalité

$$\text{dét}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

D'une façon analogue, à l'aide d'un déterminant d'ordre 4 on peut introduire une notion de déterminant d'ordre 5 et ainsi de suite.

Les définitions du mineur et du cofacteur d'un certain élément de même que les deux théorèmes concernant les cofacteurs et formules pour les déterminants d'ordre 3 restent valables pour un déterminant de n'importe quel ordre.

Ainsi en désignant par Δ_{jk} le mineur et par A_{jk} le cofacteur de l'élément a_{jk} d'un déterminant d'ordre n, on a :

$$A_{jk} = (-1)^{j+k} \Delta_{jk}$$

Soit D un déterminant d'ordre n, en le développant par rapport aux éléments de la $j^{ème}$ ligne d'abord et par rapport aux éléments de la $k^{ème}$ colonne, ensuite on obtient

$$D = a_{j1} A_{j1} + a_{j2} A_{j2} + \dots + a_{jn} A_{jn}$$

$$D = a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk}$$

D'autre part, lorsque $j \neq i$ et $k \neq l$, on a :

$$\begin{cases} a_{j1} A_{i1} + a_{j2} A_{i2} + \dots + a_{jn} A_{in} = 0 \\ a_{1k} A_{1l} + a_{2k} A_{2l} + \dots + a_{nk} A_{nl} = 0 \end{cases}$$

Toute matrice carrée régulière A (D_A dét(A) $\neq 0$) possède matrice inverse, la matrice inverse se note A^{-1} .

Cas d'une matrice d'ordre 3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D_A} & \frac{A_{21}}{D_A} & \frac{A_{31}}{D_A} \\ \frac{A_{12}}{D_A} & \frac{A_{22}}{D_A} & \frac{A_{32}}{D_A} \\ \frac{A_{13}}{D_A} & \frac{A_{23}}{D_A} & \frac{A_{33}}{D_A} \end{pmatrix}$$

où A_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} du déterminant de la matrice A.

<u>Matrice adjointe d'une matrice A</u>

<u>Définition</u>

On appelle matrice adjointe de A, la matrice déduite de A en remplaçant chaque élément a_{ij} par son cofacteur A_{ij} . on note adj(A).

<u>Matrice adjointe de ${}^tA$</u>

On vérifie que l'adjoint de la transposée de A est aussi la transposée de l'adjointe de A.

$$adj({}^tA) = {}^t(adj(A))$$

<u>Matrice inverse</u>

Toute matrice carrée régulière A (dét (A) $\neq 0$) possède une matrice inverse.

<u>Méthode pour obtenir l'inverse d'une matrice</u>

1) **on prend la transposée ^tA de A**
2) **on en déduit l'adjointe de ^tA**
3) **on divise l'adjointe par le déterminant de la matrice A**

$$A^{-1} = adj(\,^tA\,)/dét(A)$$

Exemple

Calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \,^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$dét(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

$$adj(\,^tA) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse cherchée de A est donc : $A^{-1} = 1/18 \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

III- Système de Cramer

Définition

On dit qu'un système est de Cramer si le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues et si son déterminant Δ est différent de zéro.

On démontre qu'un tel système admet une solution et une seule .

Soit Le système d'équations linéaires

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \quad\quad\quad \ldots. \\ \quad\quad\quad \ldots. \\ a_{p1}\, x_1 + a_{p2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{pn}\, x_n = b_n \end{cases}$$

Cas où n=p
On a supposé :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & a_{ni} & a_{nn} \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$$

On montre qu'il admet la solution unique

$\mathbf{x_1 = \Delta_1/\Delta\ , \ldots,\ x_i = \Delta_i/\Delta\ , \ldots,\ \ x_n = \Delta_n/\Delta}$

où

- **le dénominateur de x_i est le déterminant Δ du système**
- **et le numérateur est le déterminant qui se déduit de Δ en remplaçant la colonne des coefficients de l'inconnue x_i par la colonne des seconds membres**

Exemple

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\textbf{Si } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \textbf{ alors } \ \mathbf{x} = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}\ ,\ \mathbf{y} = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}\ .$$

■